Διαφορική εξίσωση με σταθ. συντελεστές

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 \cdot y = b(x)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

1η περ: $b(x) = P(x)$

πχ1:

$y^{(4)} + y'' = x^3 + 1 \quad (*)$

Θέτω στην μικρότερης τάξης παράγωγο πολυώνυμο ίδιας τάξης με το $P(x)$

(Συγκεκριμένα) $\quad y''(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

Επομένως, $y^{(4)}(x) = 6\alpha x + 2\beta$

Άρα, στην $(*)$ έχουμε

$6\alpha x + 2\beta + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = x^3 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha x^3 + \beta x^2 + (6\alpha + \gamma) x + 2\beta + \delta = x^3 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -6 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

πχ2

$y''' + 2y' + y = 2x^2 - x \quad (**)$

Θέτω $\quad y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$y'(x) = 2\alpha x + \beta$

$y''(x) = 2\alpha$

Στην $(**)$ είναι:

$0 + 2(2\alpha x + \beta) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x^2 - x \Rightarrow \dots \Rightarrow y_M(x) = \dots$

2^{η} περ: $b(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$ Θετουμε $y(x) = z(x) \cdot e^{\lambda x}$

πχ3

$$y''' + y'' + 2y = x^2 \cdot e^{-2x} \quad (***)$$

Θέτω $y = z \cdot e^{-2x} \Rightarrow y' = z' \cdot e^{-2x} + z \cdot e^{-2x}(-2)$

$\Rightarrow y'' = z'' \cdot e^{-2x} + z' \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + z' \cdot e^{-2x}(-2) + z \cdot e^{-2x} \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = z'' \cdot e^{-2x} - 2 \cdot 2\, z' \cdot e^{-2x} + z \cdot e^{-2x} \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y''' = z''' \cdot e^{-2x} - 2z'' e^{-2x} - 4z'' \cdot e^{-2x} + 8z' \cdot e^{-2x} + 4z' \cdot e^{-2x} - 8z \cdot e^{-2x}$

Στην $(***)$ είναι

$z''' \cdot e^{-2x} - 6z'' \cdot e^{-2x} + 12z' \cdot e^{-2x} - 8ze^{-2x} + z'' e^{-2x} +$
$- 4z' \cdot e^{-2x} + 4ze^{-2x} + 2ze^{-2x} = x^2 e^{-2x}$

Έτσι, καταλήγουμε:

$$z''' - 5z'' + 8z' - 2z = x^2$$

Δηλαδή την αναγάγαμε στην 1^{η} περίπτωση
και έτσι θέτουμε $z = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3^{η} περ: $b(x) = e^{\sigma x} \cdot P(x) \cdot \cos \tau x$ (ή $e^{\sigma x} P(x) \cdot \sin \tau x$)

όπου $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ P: πολυώνυμο

Θεωρούμε $L(\bar{y}) = P(x) \cdot e^{(\sigma + i\tau)x}$

Πχ4

(1) $y'' - y = \cos 2x = Re(e^{2ix})$
$y'' - y = \sin 2x = Im(e^{2ix})$ $\rightsquigarrow \bar{y}'' - \bar{y} = e^{2ix}$

Δηλ. την (1) την αναγάγαμε σε εξίσωση περίπτωσης $2^{\eta\varsigma}$

Θέτω, $\bar{y} = z \cdot e^{2ix} \Rightarrow \bar{y}'' = z'' \cdot e^{2ix} + 2z' (2i) \cdot e^{2ix} + z(2i)^2 \cdot e^{2ix}$

άρα, στην αρχική σχέση είναι:

$(z'' + 4z' + z \cdot (2i)^2 - z)\cancel{e^{2ix}} = \cancel{e^{2ix}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + 4iz' - 5z = 1 \xRightarrow[z(x)=1]{\text{περ. } 1^{\eta}} z(x) = -\frac{1}{5}$

άρα $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{5} e^{2ix} =$

$= -\frac{1}{5}(\cos 2x + i \sin 2x) \Rightarrow y(x) = Re\, \bar{y}(x) = -\frac{1}{5} \cos 2x$

$\bar{y}_2(x) = Im\, \bar{y}(x) = -\frac{1}{5} \cdot \sin 2x \leftarrow$ λύση της (2)

Παράδειγμα 3 ((iv) − (v))

ή στο (v)

$$y'' - 2y' + y = xe^{-x} \cdot \cos x \ (\sin x)$$

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = x \cdot e^{(-1+i)x} \quad (1)$$

Θέτω $\bar{y} = z \cdot e^{(-1+i)x}$

Άρα, στην (1), έχουμε:

$$z'' \cdot e^{(-1+i)x} + 2z'(-1+i) \cdot e^{(-1+i)x} + 2(-1+i)^2 \cdot e^{(-1+i)x} -$$

$$-2\left[z' \cdot e^{(-1+i)x} + (-1+i)\, z \cdot e^{(-1+i)x} \right] + z \cdot e^{(-1+i)x} = x \cdot e^{(-1+i)x}$$

$$z'' + 2(-1+i)z' + (-1+i)^2 \cdot z - 2z' - 2(-1+i)z + z = x$$

$$z'' + z'(-2+2i-2) + z(-2i+2-2i+1) = x$$

$$z'' + z'(2i-4) + z(3-4i) = x$$

Θέτω

$$z = \alpha x + \beta$$

Είναι

$$(2i-4)\alpha + (3-4i)(\alpha x + \beta) = x \Leftrightarrow \begin{cases} (3-4i)\alpha = 1 \\ (2i-4)\alpha + \beta(3-4i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3-4i} = \dfrac{3+4i}{25} \\ \beta = \left[(4-2i) \dfrac{3+4i}{25} \right] \dfrac{1}{3-4i} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{(4-2i)(3+4i)^2}{25^2} = \frac{2(2-i)(-7+24i)}{625} = \frac{2}{625}(10+55i)$$

Επομένως

$$\bar{y}(x) = e^{(-1+i)x} \left(\frac{1}{25}(3+4i)x + \frac{2}{625}(10+55i) \right)$$

$$\bar{y}(x) = e^{-x}(\cos x + i \sin x) \left(\frac{3}{25}x + \frac{2}{625}10 + i\left(\frac{4x}{25} + \frac{255}{625} \right) \right)$$

$$y_1(x) = \mathrm{Re}\, \bar{y}(x) = e^{x} \left[\left(\frac{3}{25}x + \frac{2}{625}10 \right) \cos x - \left(\frac{4x}{25} + \frac{255}{625} \right) \sin x \right]$$

Παράδειγμα (iv)

$$y'' - 4y' + 4y = e^x + \sin x$$

$L(y) = b_1 + b_2 \quad \begin{cases} L(y) = b_1 \to y_1 \\ L(y) = b_2 \to y_2 \end{cases}$

$y = y_1 + y_2$ λύση της (Ε)

(1) : $y'' - 4y' + 4y = e^x$

$y(x) = z \cdot e^x$

$z'' \cdot e^x + 2z' \cdot e^x + ze^x - 4(z'e^x + ze^x) + 4ze^x = e^x$

$z'' + 2z' + z - 4z' - 4z + 4z = 1$

$z'' - 2z' + z = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y(x) = e^x$

(2) : $y'' - 4y' + 4y = \sin x$

$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y} = e^{ix}$

$\bar{y} = z \cdot e^{ix}$

$z'' e^{ix} + 2z' i \cdot e^{ix} + z(-1)e^{ix} - 4(z' \cdot e^{ix} + z i e^{ix}) +$
$+ 4ze^{ix} = e^{ix} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + (2i - 4)z' + (3 - 4i)z = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{25}$

άρα $\bar{y} = \frac{1}{25}(3+4i)(\cos x + \sin x \cdot i)$

$y_\mu(x) = \mathrm{Im}(\bar{y}(x)) =$
$= \frac{1}{25}(3\cos x - 4\sin x)$

Για ένα ΒΣΛ της ομογενούς $y'' - 4y' + 4y = 0$

χ.π. $\to \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ διπλή

ΒΣΛ $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$

ΟΛΕΣ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot xe^{2x} + e^x + \frac{1}{25}(3\cos x - 4\sin x)$